

Оценки вероятностей ошибки при посимвольном приеме ансамблей ортогональных и симплексных сигналов

Л.Е.Назаров, И.В.Головкин

Институт радиотехники и электроники РАН (Фрязинский филиал)

Рассмотрена проблема оценки вероятностных характеристик при посимвольном приеме сигналов. Приведены аналитические выражения для вероятности ошибки на информационный бит при посимвольном приеме класса ансамблей ортогональных и симплексных сигналов.

Анализ вероятностных характеристик ансамблей сигналов в совокупности с применяемыми процедурами их приема составляет важный составляющий этап технологии создания помехоустойчивых систем связи [1]. Наличие развитого математического аппарата для оценки вероятностей ошибочного приема сигналов $P_{\text{ош}}$ или вероятностей ошибочного приема информационных битов P_6 позволяет осуществить теоретический анализ вероятностных характеристик, не проводя трудоемких вычислительных экспериментов, а также определить количественные метрические критерии оптимальности ансамблей сигналов, обуславливающие достижение потенциальной помехоустойчивости создаваемых систем связи [2]. Данная проблема особенно актуальна для анализа передачи дискретных сообщений с малыми вероятностями ошибок $P_{\text{ош}} < 10^{-6} - 10^{-9}$.

Рассматриваемая задача характеризуется чрезмерной сложностью решения для общих каналов передачи. В литературе при решении такой задачи обычно исследуется модель однолучевого канала с аддитивным белым гауссовским стационарным шумом. Однако даже для такой относительно простой модели аналитические соотношения вероятности ошибочного приема известны лишь для ограниченного класса ансамблей сигналов при использовании метода приема «в целом», реализующего статистический критерий максимального правдоподобия и минимизирующего вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ [1].

Еще более трудной является проблема оценивания вероятностных характеристик для правила посимвольного приема сигналов, реализующего статистический критерий максимальной посимвольной апостериорной вероятности и минимизирующего вероятность ошибки P_6 [3]. Интерес к данному методу приема объясняется тем, что алгоритмы посимвольного приема составляют основу итеративных процедур приема сигнально-кодовых конструкций под общим названием турбо-коды [4]. По отношению к вероятностным характеристикам и сложности алгоритмов формирования и приема турбо-коды рассматриваются как наиболее перспективные для использования в системах передачи дискретных сообщений.

В настоящей работе приведены полученные формульные выражения для P_6 , соответствующие применению метода посимвольного приема для класса ансамблей ортогональных и симплексных сигналов.

Постановка задачи. Пусть $A_m = (a_{ml}; 0 \leq m < M, 0 \leq l < n)$ – передаваемые равновероятные кодовые слова двоичного линейного блочного кода (n, k) ; n – длительность кодовых слов; k – размерность кода; $M = 2^k$ – объем кодовых слов [3]. Пусть $\vec{Y} = (y_l; 0 \leq l < n)$ – реализация с выхода демодулятора сигналов с двоичной фазовой модуляцией. Здесь $y_l = \sqrt{2R \frac{E_6}{N_0}} \cdot \alpha_{ml} + n_l$; $\alpha_{ml} = (-1)^{a_{ml}}$; $R = \frac{k}{n}$ – кодовая скорость; E_6 – энергия сигналов в канале на информационный бит; N_0 – односторонняя спектральная плотность помехи в канале в виде аддитивного белого гауссовского стационарного шума. Для канала без памяти компоненты помехи n_l являются независимыми случайными гауссовскими величинами с нулевым средним и единичной дисперсией.

Правило оптимального когерентного приема в целом передаваемого сигнала, соответствующего кодовому вектору $\vec{A}_m$, заключается в выборе вектора $\vec{A}'$, максимизирующего апостериорную вероятность $\Pr(\vec{A}' | \vec{Y}) = \max_m (\Pr(\vec{A}_m | \vec{Y}))$ [3]. Если $\vec{A}' = \vec{A}_m$, то выполняется условие правильного приема. Общей вероятностной характеристикой ансамблей сигналов при их приеме является вероятность ошибки $P_{\text{ош}}(A_m)$ [3]. Эта вероятность определяется параметром сигнал/помеха $\frac{E_6}{N_0}$ и матрицей коэффициентов вза-

имных корреляций между сигналами $\|\rho_{ij}\|$, $i = 0, 1, \dots, M-1$; $j = 0, 1, \dots, M-1$ [2]. Для сигналов, соответствующих групповым блочным кодам, вероятность $P_{\text{ош}}(A_m)$ не зависит от номера m и определяется множеством евклидовых расстояний между сигналом, соответствующим нулевому кодовому слову, и другими сигналами из ансамбля [1, 2].

Для класса ортогональных сигналов ($\rho_{ij} = 0, i \neq j$) и симплексных сигналов ($\rho_{ij} = \rho, i \neq j$) объемом $M = 2^k$ известны точные аналитические соотношения $P_{\text{ош}}$ [1, 3]:

$$P_{\text{ош}} = \frac{M-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{\frac{2E(1-\rho)}{N_0}}\right)^2\right) F^{M-2}\left(x + \sqrt{\frac{2E(1-\rho)}{N_0}}\right) dx. \quad (1)$$

Здесь $E = E_6 k$ – энергия сигналов в канале, $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-x^2/2) dx$.

Соответствующее выражение для ошибки на бит $P_6^{(1)}$ при приеме в целом данных ансамблей сигналов имеет вид [3]

$$P_6^{(1)} = \frac{M}{2(M-1)} \cdot P_{\text{ош}}. \quad (2)$$

Альтернативу приему в целом составляет посимвольный прием [3]. Для этого метода приема рассматривается вероятность ошибки на бит $P_6^{(2)}$. Оптимальный посимвольный прием сигнала, соответствующего кодовому слову $\vec{A}_m$, заключается в вычис-

лении апостериорных посимвольных вероятностей $\Pr(a_l|\vec{Y})$ и принятии решения $a_l = 0$, если $\Pr(a_l = 0|\vec{Y}) > \Pr(a_l = 1|\vec{Y})$, и $a_l = 1$ в противном случае ($l = 0, 1, \dots, k-1$).

Апостериорная вероятность $\Pr(a_l = \xi|\vec{Y})$ задается соотношением [3]

$$\Pr(a_l = \xi|\vec{Y}) = \sum_{\vec{A}} \delta(a_l - \xi) \Pr(\vec{A}|\vec{Y}) = \sum_{\vec{A}} \delta(a_l - \xi) \frac{1}{M \cdot p(\vec{Y})} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} p(y_i|a_l). \quad (3)$$

Здесь $\delta(x) = 0$, если $x = 0$, и $\delta(x) = 1$, если $x = 1$; $\xi = 0, 1$.

Если $\xi = 0$, то суммирование в (3) осуществляется для множества кодовых векторов из аддитивной группы $\vec{A}(a_l = 0)$ кода (n, k) , l -й столбец ее порождающей матрицы нулевой. Если $\xi = 1$, то суммирование осуществляется для множества кодовых векторов из смежного класса $\vec{A}(a_l = 1)$ кода по подгруппе $\vec{A}(a_l = 0)$.

В работе [5] показано, что вероятность ошибки $P_6^{(2)}(a_l)$ для фиксированного значения l при посимвольном приеме не зависит от передаваемого вектора $\vec{A}_m$. Ниже рассматривается передача сигнала, соответствующего нулевому кодовому вектору ($m = 0$). Известно также, что $P_6^{(2)}(a_l)$ при посимвольном приеме ортогональных и симплексных сигналов не зависит от номера l .

Реализация соотношения (3) требует вычислений нелинейных функций экспоненциального типа, а также знания оценки энергетического параметра $\frac{E_6}{N_0}$. Это сущест-

венно усложняет техническое исполнение соответствующих приемных устройств. В приложениях применяется модифицированная процедура посимвольного приема, при ее реализации не требуется знание относительно энергетического параметра и требуются лишь простые арифметические операции (сложение, вычитание, сравнение) [4].

Модифицированная процедура посимвольного приема заключается в вычислении и сравнении случайных величин

$$\xi_0^{(l)} = \max_{\vec{A}_m \in \vec{A}(a_l=0)} (z_m), \quad (4)$$

$$\xi_1^{(l)} = \max_{\vec{A}_m \in \vec{A}(a_l=1)} (z_m), \quad l = 0, 1, \dots, M-1. \quad (5)$$

Здесь $z_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \alpha_{im}$ – случайные величины с гауссовским законом плотности рас-

пределения. Принимается решение $a_l = 0$, если $\xi_0^{(l)} > \xi_1^{(l)}$, и $a_l = 1$ в противном случае.

Подобная процедура с названием log-Max-MAP применяется при посимвольном приеме сигналов, соответствующих сверточным кодам [4].

В настоящее время в литературе отсутствуют методики оценки вероятностных характеристик при посимвольном приеме ансамблей сигналов в общем случае, подобные эффективным методикам оценки вероятностных характеристик при приеме сигналов в целом.

Ниже приведены выражения для вероятности ошибки $P_6^{(2)}$ при применении модифицированного правила посимвольного приема ансамблей ортогональных и симплексных сигналов. Модифицированное правило посимвольного приема является подоптимальным, поэтому полученные соотношения определяют верхние границы ошибки на бит $P_6^{(2)}$ для оптимального посимвольного приема рассматриваемых ансамблей сигналов.

Вероятности ошибки при посимвольном приеме ортогональных сигналов. Ансамбли ортогональных сигналов объемом $M = 2^k$ соответствуют линейным блоковым кодам с параметрами $(2^k, k)$. Для получения формульных соотношений вероятности ошибки $P_6^{(2)}$ для данных сигналов определим функции распределения $\text{Pr}_{\xi_0}(x)$, $\text{Pr}_{\xi_1}(x)$ и соответствующие плотности распределения $p_{\xi_0}(x)$, $p_{\xi_1}(x)$ случайных величин, задаваемых соотношениями (4), (5).

Для ансамбля ортогональных сигналов объемом $M = 2^k$ введенные выше случайные величины $z_i, i = 0, 1, \dots, M-1$, статистически независимые с нулевыми средними при $i \neq 0$ и средним $\sqrt{\frac{2E}{N_0}}$ при $i = 0$ и дисперсиями, равными 1. Поэтому случайные величины $\xi_0^{(l)}, \xi_1^{(l)}$ ($l = 0, 1, \dots, M-1$) статистически независимые. Функция распределения $\text{Pr}_{\xi_0}(x)$ и плотность распределения $p_{\xi_0}(x)$ имеют вид [6]:

$$\text{Pr}_{\xi_0}(\xi_0^{(l)} < x) = \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z_1 - \sqrt{2E/N_0})^2}{2}\right) \cdot \prod_{i=2}^{M/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z_i^2/2) dz; \quad (6)$$

$$p_{\xi_0}(x) = \frac{d(\text{Pr}_{\xi_0}(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \sqrt{2E/N_0})^2}{2}\right) \cdot F^{M/2-1}(x) + \\ + \frac{M/2-1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \cdot F^{M/2-2}(x) \cdot F(x - \sqrt{2E/N_0}). \quad (7)$$

Аналогично определяется плотность распределения $p_{\xi_1}(x)$

$$p_{\xi_1}(x) = \frac{M/2}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \cdot F^{M/2-1}(x). \quad (8)$$

Вероятность ошибки на бит $P_6^{(2)}$ для данного ансамбля сигналов определяется соотношением

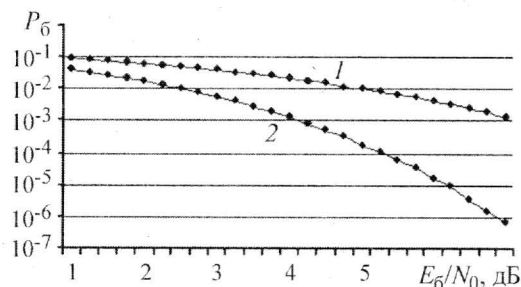
$$P_6^{(2)} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_0}(x) \left(\int_{-\infty}^x p_{\xi_1}(y) dy \right) dx = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot F^{M-1}(x) \cdot \exp\left(-\frac{(x - \sqrt{2E/N_0})^2}{2}\right) dx - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M/2-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot F^{M-2}(x) \cdot \exp(-x^2/2) \cdot F(x - \sqrt{2E/N_0}) dx. \quad (9)$$

Составляющие интегралы в соотношении (9) можно взять по частям, результирующее выражение имеет вид

$$P_6^{(2)} = \frac{M/2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x - \sqrt{2E/N_0}) \cdot F^{M-2}(x) \cdot \exp(-x^2/2) dx. \quad (10)$$

Выражение (10) совпадает с приведенным выражением (2) для $P_6^{(1)}$, линейно связанным с вероятностью ошибки $P_{\text{ош}}$ (1) при приеме ортогональных сигналов в целом.

В качестве примера на рисунке приведены вероятности $P_6^{(2)}$ для ансамбля ортогональных сигналов объемом $M = 4$ и $M = 64$, вычисленные с использованием соотношения (10). По оси абсцисс отложены значения введенного выше в рассмотрение энергетического параметра $\frac{E_6}{N_0}$.



Вероятности ошибки на бит для ансамбля ортогональных сигналов объемом $M = 4$ (кривая 1) и $M = 64$ (кривая 2) при применении модифицированного правила посимвольного приема

Моделирование показало, что приведенные кривые практически совпадают с вероятностными кривыми для данных ансамблей сигналов при применении правила оптимального посимвольного приема (3) (относительные различия вероятностных кривых для анализируемых значений сигнал/помеха не превышали 0,2%).

Вероятности ошибки при посимвольном приеме симплексных сигналов. Ансамбли симплексных сигналов объемом $M = 2^k$ соответствуют линейным блоковым кодам с параметрами $(2^k - 1, k)$ [2, 3].

Особенностью ансамблей симплексных сигналов ($\rho_{ij} = \rho = -\frac{1}{M-1}$, $i \neq j, \rho_{ii} = 1$) является сингулярность их корреляционной матрицы $\|\rho_{ij}\|$, т.е. определитель $\det(\|\rho_{ij}\|) = (1 - \rho)^{M-1}(1 + (M-1)\rho)$ равен 0 [7]. Поэтому для данных ансамблей сигналов нельзя в простом виде записать многомерные плотности распределения введенных выше случайных величин z_i , $i = 0, 1, \dots, M-1$. Кроме того, для данных ансамблей величины z_i , $i = 0, 1, \dots, M-1$ – статистически зависимые и случайные величины – $\xi_0^{(l)}, \xi_1^{(l)}$ ($l = 0, 1, \dots, M-1$) также статистически зависимые.

В этом случае для получения формульного соотношения вероятности ошибки $P_6^{(2)}$ при реализации модифицированного алгоритма посимвольного правила приема (4), (5) введем новые случайные величины χ_i, y , связанные соотношением $z_i = \chi_i + y$, $i = 0, 1, \dots, M-1$. Здесь χ_i, y – независимые случайные величины с гауссовским законом плотности распределения со средним $\rho \cdot \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$ при $i \neq 0$ и средним $\sqrt{\frac{2E}{N_0}}$ при $i = 0$. Дисперсии величин χ_i равны $1 - \rho$, дисперсия величины y равна ρ .

Так как величина y является слагаемым для всех величин z_i , то условие правильного посимвольного приема можно задать соотношениями (4), (5) для независимых случайных величин χ_i . В этом случае задача вычисления ошибки $P_6^{(2)}$ подобна рассмотренной выше задаче вычисления ошибки для ансамблей ортогональных сигналов.

Соответствующие плотности распределения $p_{\xi_0}(x)$ и $p_{\xi_1}(x)$ величин ξ_0, ξ_1 для χ_i , задаваемых соотношениями (4), (5), имеют вид

$$p_{\xi_0}(x) = \frac{d}{dx} \left(F \left(\frac{x - \sqrt{2E/N_0}}{\sqrt{1-\rho}} \right) \cdot F^{M/2-1} \left(\frac{x - \rho\sqrt{2E/N_0}}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right), \quad (10)$$

$$p_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} \left(F^{M/2} \left(\frac{x - \rho\sqrt{2E/N_0}}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right). \quad (11)$$

Резльтирующее выражение для вероятности ошибки на бит $P_6^{(2)}$ с учетом (10), (11) определяется соотношением

$$P_6^{(2)} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_0}(x) \left(\int_{-\infty}^x p_{\xi_1}(y) dy \right) dx = \frac{M/2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot F^{M-2} \left(x + \sqrt{\frac{2E(1-\rho)}{N_0}} \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{2} \left(x + \sqrt{\frac{2E(1-\rho)}{N_0}} \right)^2 \right) dx. \quad (12)$$

Полученное выражение (12) совпадает с выражением (2) для вероятности ошибки на бит $P_6^{(1)}$, линейно связанной с вероятностью ошибки на сообщение $P_{\text{ош}}$ (1) при приеме симплексных сигналов в целом.

Приведенные аналитические выражения для вероятности ошибки на бит при применении модифицированного правила посимвольного приема класса ансамблей ортогональных и симплексных сигналов совпадают с выражением для вероятности ошибки на бит при оптимальном приеме в целом рассматриваемых ансамблей сигналов. Модифицированное правило посимвольного приема является подоптимальным, поэтому полученные соотношения определяют верхние границы ошибки на бит для оптимального посимвольного приема рассматриваемых ансамблей сигналов.

Литература

1. Коржик В.И., Финк Л.М., Щелкунов Н.Н. Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений. М.: Радио и связь, 1981. – 232 с.
2. Теория связи / А.В.Балакришнан, Дж.В.Карлил, В.Л.Рут и др.: Пер. с англ. – М.: Связь, 1972. – 392 с.
3. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1987. – 390 с.
4. Hagenauer J., Offer E., Papke L. Iterative decoding of binary block and convolutional codes // IEEE Trans. on Inform. Theory. – 1996. – Vol. 42, № 2. – P. 429–448.
5. Назаров Л.Е. Вероятностные характеристики при оптимальном посимвольном приеме сигналов, соответствующих двоичным блоковым кодам // Радиотехника и электроника. – 1999. – Т. 44, № 10. – С. 1231–1235.
6. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Сов.радио, 1966. – 678 с.
7. Уилкс С. Математическая статистика: Пер. с англ. – М.: Наука, 1967. – 632 с.

Статья поступила 14 марта 2008 г.

Назаров Лев Евгеньевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФИРЭ РАН. *Область научных интересов:* теория цифровых систем связи, цифровая обработка сигналов, теория сигналов.

Головкин Илья Владимирович – аспирант ФИРЭ РАН. *Область научных интересов:* теория помехоустойчивого кодирования, схемотехника.